SEMINAR NASIONAL TEKNOKA

Vol. 2, 2017
ISSN No. 2502-8782

Pendugaan Parameter Model Produksi *Constant Elasticity of Subtitutions* (CES) dengan Metode Kuadrat Terkecil Nonlinear

Dian Kurniasari[1*], Noferdis Setiawan[2], Warsono[3] dan Yeftanus Antonio[4]

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung
Jl. Soemarti Brojonegoro No.1 Rajabasa, Bandar Lampung 35141
E-mail : dian.kurniasari@fmipa.unila.ac.id

Abstrak – *Tujuan dari penelitian ini adalah memperoleh nilai dugaan dari model produksi Constant Elasticity Subtitutions (CES) secara intrinsik nonlinear. Model produksi CES didefinisikan dengan* $Y = \theta_1\left(\theta_2 x_1^{-\theta_3} + (1-\theta_2)x_2^{-\theta_3}\right)^{\frac{\theta_4}{\theta_3}}$. *Metode kuadrat terkecil nonlinear digunakan untuk menduga model produksi CES. Persamaan yang diperoleh dengan metode kuadrat terkecil nonlinear tidak dapat diselesaikan secara analitik. Untuk menyelesaikan masalah tersebut digunakan metode iteratif Newton Raphson. Model produksi CES yang diperoleh dari hasil studi dengan menggunakan data adalah* $Y = 11.2135(0.4053x_1^{-0.5963} + 0.5847x_2^{-0.5963})^{-\frac{0.8272}{0.5963}}$. *Simulasi yang dilakukan dengan metode ini menunjukan bias untuk masing-masing parameter adalah* $\hat{\theta}_1$=-1.021, $\hat{\theta}_2$= -0.0054, $\hat{\theta}_3$= 0.0675 dan $\hat{\theta}_4$= 0.0955. Hasil tersebut menunjukan metode kuadrat terkecil nonlinear cekup baik untuk menduga parameter pada model produksi CES.

Kata kunci: *model nonlinear, CES, newton Raphson, metode kuadrat terkecil nonlinear.*

1 Pendahuluan

Model nonlinear dapat dibedakan menjadi dua yaitu model nonlinear pada variabel dan model nonlinear pada parameter. Model nonlinear pada parameter dapat dibagi menjadi dua yaitu model nonlinear secara intrinsik linear (*intrinsically linear*) dan nonlinear secara intrinsik nonliear (*intrinsically nonlinear*). Model nonlinear secara intrinsik linear adalah model yang dapat ditransformasi kedalam bentuk linier dengan menggunakan fungsi logaritma natural *ln*. Sedangkan model nonlinear secara intrinsik nonlinear adalah model yang tidak dapat ditranformasi kedalam bentuk linear.

Model nonlinear secara intrinsik nonliear (*intrinsically nonlinear*) banyak ditemukan pada model-model ekonomi salah satunya adalah model produksi *Constant Elasticity of Subtitutions* (CES). Pada model nonlinear secara intrinsik nonlinear tidak dapat diduga secara langsung seperti pada persamaan linear atau nonlinear secara intrinsik linear. Oleh karena itu, dalam makalah ini dibahas tentang pendugaan parameter model produksi *Constant Elasticity Of Subtitutions* (CES) dengan metode kuadrat terkecil nonlinear.

Tujuan dari penelitian ini adalah (1) Menduga parameter model nonlinear secara intrinsik nonlinear dengan menggunakan metode kuadrat terkecil nonlinear (*Nonlinear Least Square*); (2) Mendapatkan nilai dugaan bagi parameter model nonlinear secara intrinsik nonlinear dengan metode Newton Raphson.

Metode kuadrat terkecil nonlinear memperoleh penduga bagi parameter dengan meminimumkan jumlah kuadrat dari galat sehingga diperoleh persamaan normal. Solusi dari persamaan normal tersebut menghasilkan penduga bagi parameter. Persamaan normal kadangkala menghasilkan persamaan normal yang nonlinear.

Pada kasus ini, pendugaan parameter model produksi CES dengan metode kuadrat terkecil nonlinear menghasilkan persamaan yang tidak dapat diselesaikan secara eksak sehingga dilakukan penyelesaian secara numerik dengan metode Newton Raphson untuk mendapatkan nilai-nilai dugaan parameter model produksi CES. Untuk memverifikasi hasil pendugaan yang diperoleh, maka dilakukan simulasi dengan membangkitkan data untuk variabel X1, X2, dan Y.

Manuscript received 20 Sepetember 2017, revised 29 September 2017

2 Landasan Teori

2.1 Model Nonlinear

Model nonlinear merupakan bentuk hubungan antara peubah penjelas yang tidak linear dalam parameter. Secara umum model nonlinear ditulis sebagai berikut:

$$y_i = f(x_i, \Theta) + \varepsilon_i \quad ; i = 1,2,\ldots,n \tag{1}$$

dengan,

y_i : peubah respon ke-i.
$f(.)$: fungsi nonlinear
x_i : peubah penjelas respon ke-i
Θ : parameter
ε_i ; galat ke-i
ε_i diasumsikan saling bebas independen menyebar normal dengan nilai tengah 0 dan ragam σ^2.

Model nonlinear dapat dibagi menjadi dua yaitu model nonlinear secara intrinsik linear (*intrinsically linear*) dan nonlinear secara intrinsik nonlinear (*intrinsically nonlinear*). Model yang secara intrinsik linear adalah model nonlinear yang dapat ditransformasi menjadi bentuk linear sedangakan model yang secara intrinsik nonlinear yaitu model yang tidak bisa ditransformasi menjadi bentuk linear [1].

2.2 Model Produksi Constan Elasticity of Subtitutions (CES)

Fungsi *constant elasticity of subtitution* disingkat dengan CES dikembangkan oleh Arrow, Chenery, Minhan, dan Solow (1961) [2]. Elastisitas subtitusi adalah ukuran bagaimana perusahaan dengan mudah mensubtitusikan satu input dengan input lainnya untuk menjaga tingkat produksi pada level yang sama. Model produksi CES didefinisikan sebagai berikut :

$$Y = \theta_1(\theta_2 x_1^{-\theta_3} + (1-\theta_2)x_2^{-\theta_3})^{\frac{\theta_4}{\theta_3}} \tag{2}$$

dimana Y=output, x_1=input kapital, x_2=input tenaga kerja, dengan $\theta_1>0$, $0<\theta_2<1$, dan $\theta_3 \geq -1$ serta (x_1, x_2) merupakan input bivariat. θ_1 dinyatakan sebagai parameter efisiensi, θ_2 sebagai parameter distribusi, θ_3 sebagai parameter subtitusi, dan θ_4 sebagai parameter *return to scale*.

Berikut model produksi CES dinyatakan dalam bentuk *logaritma natural*:

$$ln\, Y = ln\, \theta_1 + \frac{\theta_4}{\theta_3} ln(\theta_2 x_1^{-\theta_3} + (1-\theta_2)x_2^{-\theta_3}) \tag{3}$$

Dapat dilihat model produksi CES pada Persamaan (3) tidak dapat ditransformasi kedalam bentuk linear.

2.3 Pendugaan Parameter

Pendugaan parameter adalah proses untuk menduga atau menaksir parameter populasi yang tidak diketahui berdasarkan informasi dari sampel. Kriteria penduga yang baik adalah takbias, ragam minimum, konsisten, statistik cukup dan kelengkapan [3]. Berikut ini hanya akan dibahas dua kriteria penduga yang baik, yaitu tak bias dan ragam minimum karena dianggap sudah cukup melihat suatu penduga yang baik.

1. Suatu statistik dikatakan penduga tak bias dari parameter θ apabila nilai harapan penduga sama dengan parameter θ, sebaliknya jika nilai harapan statistik tersebut tidak sama dengan parameter θ maka disebut penduga θ yang berbias.
2. Suatu penduga dikatakan memiliki ragam minimum apabila penduga tersebut memiliki ragam yang kecil. Apabila terdapat lebih dari satu penduga, penduga yang efisien adalah penduga yang memiliki ragam terkecil.

Besarnya galat pendugaan dinyatakan sebagai bias dan didefiniskan oleh:

$$\text{Bias } \hat{\theta}_i = \text{E}(\hat{\theta}_i) - \hat{\theta}_i \text{ [4].}$$

2.4 Metode Pendugaan Kuadrat Terkecil Nonlinear (Nonlinear Least Square)

Misalkan model nonlinear yang didefinisikan dengan bentuk:

$$Y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) + \varepsilon \tag{4}$$

Misalkan $= (x_1, x_2, \ldots, x_p)$, $\boldsymbol{\Theta} = \left(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p\right)'$ maka model pada persamaaan (1) dapat dituliskan sebagai:

$$Y = f(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\Theta}) + \varepsilon \tag{5}$$

dengan asumsi $E(\varepsilon) = 0$, $Var(\varepsilon) = \sigma^2$, dan $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ maka jumlah kuadrat galat untuk model nonlinear di atas didefinisikan sebagai berikut:

$$S(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \{Y_i - f(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{\Theta})\}^2 \tag{6}$$

Nilai dugaan kuadrat terkecil bagi $\boldsymbol{\theta}$ akan dilambangkan dengan $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Nilai dugaan ini adalah nilai $\boldsymbol{\theta}$ yang meminimumkan $S(\boldsymbol{\theta})$.

Untuk memperoleh nilai dugaan kuadrat terkecil $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ yaitu dengan mendiferensialkan jumlah kuadrat galat terhadap $\boldsymbol{\theta}$. Hasilnya membentuk persamaan normal dengan bentuk:

$$\sum_{i=1}^{n} \{Y_i - f(\boldsymbol{X}, \hat{\boldsymbol{\theta}})\}^2 \left[\frac{\partial f(\boldsymbol{\xi}, \hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \theta_i}\right] = 0 \tag{7}$$

persamaan tersebut disebut persamaan normal untuk model nonlinear [5].

2.5 Metode Newton Raphson

Apabila dalam proses pendugaan parameter didapat persamaan akhir yang nonlinear maka pendugaan parameter didekati dengan metode numerik. Metode yang cukup banyak digunakan untuk menyelesaikan system persamaan nonlinear adalah metode Newton Raphson. Metode Newton Raphson adalah metode untuk menyelesaikan persamaan nonlinear secara iteratif.

Jika θ_0 merupakan nilai awal dari θ atau θ_0 merupakan nilai ke-1 dari θ, maka dapat dimisalkan $\theta_0 = \theta_1$ dan $\theta = \theta_{i+1}$ dengan nilai awal $i = 0$.

Metode ini dapat diperluas untuk menyelesaikan persamaan dengan lebih dari satu parameter. Misal $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ maka iterasinya sebagai berikut:

$$\boldsymbol{\theta_{i+1}} = \boldsymbol{\theta_i} - [\boldsymbol{H^{-1}g}] \quad (8)$$

Vektor gradient atau vector turunan pertama jumlah kuadrat terhadap parameter-parameter dilambangkan dengan $g(\theta)$ yaitu:

$$g(\Theta) = \frac{\partial S(\Theta)}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial S(\Theta)}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial S(\Theta)}{\partial \theta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial S(\Theta)}{\partial \theta_n} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Matriks Hessian atau matrikks turunan kedua dari jumlah kuadrat terhadap masing-masing parameter dilambangkan dengan $H(\theta)$ yaitu:

$$H(\Theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 S(\Theta)}{\partial \theta_1 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 S(\Theta)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 S(\Theta)}{\partial \theta_1 \partial \theta_n} \\ \frac{\partial^2 S(\Theta)}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 S(\Theta)}{\partial \theta_2 \partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 S(\Theta)}{\partial \theta_2 \partial \theta_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 S(\Theta)}{\partial \theta_n \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 S(\Theta)}{\partial \theta_n \partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 S(\Theta)}{\partial \theta_n^2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

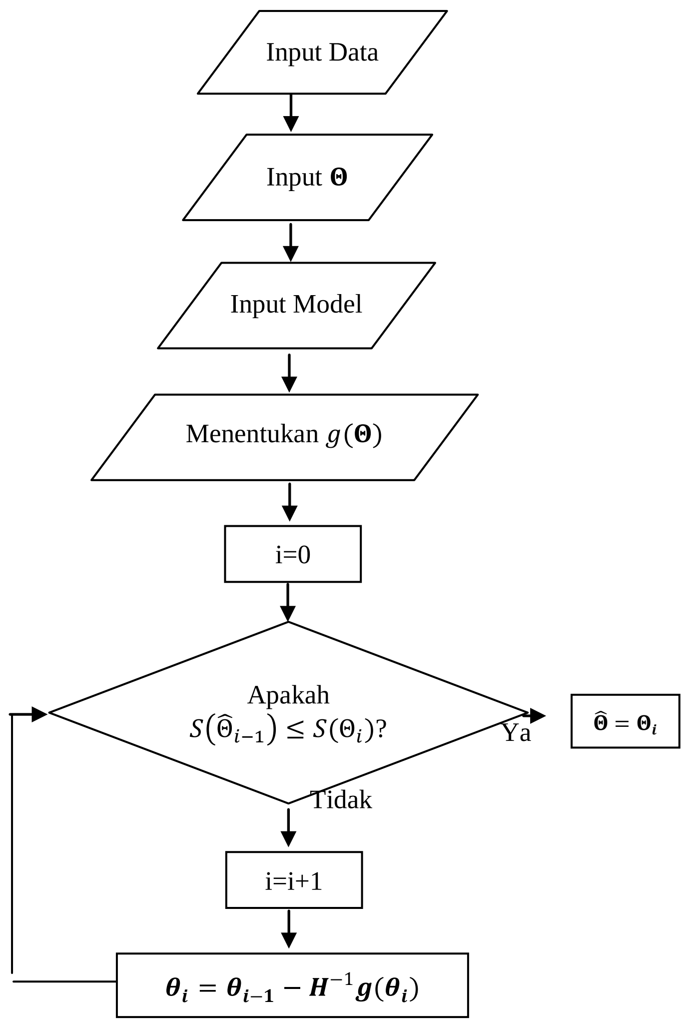
3 Metodologi Penelitian

Penelitian ini dilakukan untuk mendapatkan nilai pendugaan parameter pada model produksi CES (*Constant Elasticity of Substitution*) yaitu θ_1, θ_2, θ_3, dan θ_4 dengan menggunakan metode Kuadrat Terkecil Nonlinear (*Nonlinear Least Square*). Kemudian menggunakan *software* statistika untuk menduga parameter model nonlinear produksi CES.

Adapun langkah-langkah yang akan dilakukan adalah:

1. Mendefinisikan model produksi CES.
2. Menentukan jumlah kuadrat galat dari produksi CES.
3. Menduga parameter θ_1, θ_2, θ_3, dan θ_4 model nonlinear produksi CES dengan menggunakan metode Kuadrat Terkecil Nonlinear (*Nonlinear Least Square*) yaitu
   (a) Meminimumkan jumlah kuadrat galat dengan konsep diferensial untuk memperoleh persamaan normal.
   (b) Mengidentifikasi bentuk persamaan normal yang berbentuk nonlinear.
4. Menyelesaikan persamaan yang tidak dapat diselesaikan secara eksak dengan Metode Newton Raphson yaitu:
   (a) Menentukan nilai awal untuk $i = 0$, dan menentukan kriteria untuk kekonvergenan iterasi yaitu ketika $S(\widehat{\Theta}_{i-1}) \leq S(\Theta_i)$.
   (b) Menentukan $\boldsymbol{\theta}$ yang dipilih ketika memenuhi kondisi tersebut yaitu $\boldsymbol{\theta_i} = \boldsymbol{\theta_{i-1}} - \boldsymbol{H^{-1}g(\theta_i)}$

   Algoritma dengan metode Newton Raphson dalam bentuk diagram alir ditampilkan oleh Gambar 1.
5. Menggunakan *software* statistika untuk menduga parameter model nonlinear produksi CES.



Gambar 1 *Diagram alir pendugaan parameter model nonlinear dengan metode Newton Raphson*

4 Hasil dan Pembahasan

4.1. Pendugaan Model Produksi CES dengan Metode Kuadrat Terkecil Nonlinear.

Fungsi produksi *Constant Elasticity of Subtitution* (CES) yaitu :

$$Y_i = Q = \theta_1[\theta_2 x_{1i}^{-\theta_3} + (1 - \theta_2) x_{2i}^{-\theta_3}]^{\frac{\theta_4}{\theta_3}} \quad (11)$$

Pendugaan parameter dengan menggunakan metode Kuadrat Terkecil yaitu meminimumkan jumlah kuadrat galat ($S(\Theta)$) dengan cara menurunkan jumlah kuadrat galat tersebut terhadap masing-masing parameter kemudian disamadengankan nol.

Jumlah kuadrat untuk model (11) adalah:

$$S(\Theta) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ Y_i - \left(\theta_1 \left[\theta_2 x_{1i}^{-\theta_3} + (1-\theta_2) x_{2i}^{-\theta_3} \right]^{\frac{\theta_4}{\theta_3}} \right) \right\}^2 \quad (12)$$

Pendugaan parameter-parameter model produksi CES diperoleh dengan cara meminimumkan jumlah kuadrat seperti pada Persamaan (12) yaitu dengan mendiferensialkan jumlah kuadrat tersebut terhadap masing-masing parameter pada model produksi CES.

$$2\sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(Y_i - \left(\theta_1 \left[\theta_2 x_{1i}^{-\theta_3} + (1-\theta_2) x_{2i}^{-\theta_3} \right]^{\frac{\theta_4}{\theta_3}} \right) \right) \left(-\left[\theta_2 x_{1i}^{-\theta_3} + (1-\theta_2) x_{2i}^{-\theta_3} \right]^{\frac{\theta_4}{\theta_3}} \right) \right\} = 0 \quad (13)$$

Dengan cara yang sama yaitu mendiferensialkan terhadap θ_2, θ_3, dan θ_4 maka diperoleh persamaan normal untuk θ_2, θ_3, dan θ_4 pada persamaan (14), (15), dan (16) berikut ini:

$$2\sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(Y_i - \left(\theta_1 \left[\theta_2 x_{1i}^{-\theta_3} + (1-\theta_2) x_{2i}^{-\theta_3} \right]^{\frac{\theta_4}{\theta_3}} \right) \right) \left(-\frac{\theta_4\, \theta_1 (x_{1i}^{-\theta_3} - x_{2i}^{-\theta_3})}{\theta_3} \left[\theta_2 x_{1i}^{-\theta_3} + (1-\theta_2) x_{2i}^{-\theta_3} \right]^{\frac{(\theta_4 - \theta_3)}{\theta_3}} \right) \right\} = 0 \quad (14)$$

$$2\sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(Y_i - \left(\theta_1 \left[\theta_2 x_{1i}^{-\theta_3} + (1-\theta_2) x_{2i}^{-\theta_3} \right]^{\frac{-1}{\theta_3}} \right) \right) \left(-\theta_1 \left[\theta_2 x_{1i}^{-\theta_3} + (1-\theta_2) x_{2i}^{-\theta_3} \right]^{\frac{-1}{\theta_3}} \left(\frac{\theta_4 \left(\theta_2 x_{1i}^{-\theta_3} \ln x_{1i} + (1-\theta_2) x_{2i}^{-\theta_3} \ln x_{2i} \right)}{\theta_3 \left(\theta_2 x_{1i}^{-\theta_3} + (1-\theta_2) x_{2i}^{-\theta_3} \right)} - \frac{\theta_4 \ln \left[\theta_2 x_{1i}^{-\theta_3} + (1-\theta_2) x_{2i}^{-\theta_3} \right]}{\theta_3^2} \right) \right) \right\} = 0 \quad (15)$$

$$2\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \left(\theta_1 \left[\theta_2 x_{1i}^{-\theta_3} + (1-\theta_2) x_{2i}^{-\theta_3} \right]^{\frac{-1}{\theta_3}} \right) \right) \left(-\theta_1 \left[\theta_2 x_{1i}^{-\theta_3} + (1-\theta_2) x_{2i}^{-\theta_3} \right]^{\frac{\theta_4}{\theta_3}} \left(\frac{\ln[\theta_2 x_{1i}^{-\theta_3} + (1-\theta_2) x_{2i}^{-\theta_3}]}{\theta_3} \right) \right) = 0 \quad (16)$$

Persamaan (13), (14), (15), dan (16) tidak dapat diselesaikan secara eksak, untuk itu diperlukan metode iterasi untuk mendapatkan dugaan bagi parameter θ_1, θ_2, dan θ_3. Sehingga untuk mendapatkan nilai dugaan bagi parameter θ_1, θ_2, dan θ_3 dapat menggunakan metode Newton Raphson.

Metode Newton Raphson adalah salah satu metode iteratif yang sering digunakan karena tingkat konvergensinya paling cepat dibandingkan dengan metode lain. Metode ini menggunakan vektor gradien atau vektor turunan pertama dari jumlah kuadrat terhadap parameter-parameter ($g(\Theta)$) dan turunan kedua dari jumlah kuadrat terhadap parameter-parameternya atau disebut matriks Hessian ($H(\Theta)$). Berikut ini vektor gradien dan matriks Hessian untuk model produksi CES dengan parameter θ_1, θ_2, θ_3, dan θ_4.

$$g(\Theta) = \frac{\partial S(\Theta)}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial S(\Theta)}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial S(\Theta)}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial S(\Theta)}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial S(\Theta)}{\partial \theta_4} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$H(\Theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 S(\Theta)}{\partial \theta_1 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 S(\Theta)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \frac{\partial^2 S(\Theta)}{\partial \theta_1 \partial \theta_3} & \frac{\partial^2 S(\Theta)}{\partial \theta_1 \partial \theta_4} \\ \frac{\partial^2 S(\Theta)}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 S(\Theta)}{\partial \theta_2 \partial \theta_2} & \frac{\partial^2 S(\Theta)}{\partial \theta_2 \partial \theta_3} & \frac{\partial^2 S(\Theta)}{\partial \theta_2 \partial \theta_4} \\ \frac{\partial^2 S(\Theta)}{\partial \theta_3 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 S(\Theta)}{\partial \theta_3 \partial \theta_2} & \frac{\partial^2 S(\Theta)}{\partial \theta_3 \partial \theta_3} & \frac{\partial^2 S(\Theta)}{\partial \theta_3 \partial \theta_4} \\ \frac{\partial^2 S(\Theta)}{\partial \theta_4 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 S(\Theta)}{\partial \theta_4 \partial \theta_2} & \frac{\partial^2 S(\Theta)}{\partial \theta_4 \partial \theta_3} & \frac{\partial^2 S(\Theta)}{\partial \theta_4 \partial \theta_4} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Sehingga proses iterasi yang dilakukan adalah sebagai berikut :

$$\boldsymbol{\theta_{i+1}} = \boldsymbol{\theta_i} - [\mathbf{H^{-1} g}] \quad (19)$$

Untuk memudahkan melakukan iterasi dengan metode Newton-Raphson. Untuk menduga parameter Persamaan (11) maka digunakan segugus data. Data yang digunakan dalam penelitian ini didapat dari buku (Rasidin & Bonar, 2006) [2]. Gugus data terdiri dari input modal (X_1), input tenaga kerja (X_2), dan tingkat produksi (Y).

ISSN No. 2502-8782

Nilai awal grid bertujuan untuk menentukan nilai awal yang baik. Pemilihan nilai awal ynag baik menggunakan grid yaitu dengan cara memilih nilai yang memiliki jumlah kuadrat terkecil. Berikut ini hasil iterasi Newton Raphson yang diperoleh dengan menggunakan nilai awal yang dipilih berdasarkan jumlah kuadrat yang paling kecil dengan menggunakan grid yaitu θ_1= 15, θ_2= 0.5, θ_3= 0.5 dan θ_4= 0.5.

Tabel 1. Hasil proses iterasi dengan nilai awal θ_1= 15, θ_2= 0.5, θ_3= 0.5 dan θ_4= 0.5

Iter	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	Sum of Squares
0	15.0000	0.5000	0.5000	0.5000	23933.3
1	18.1767	0.8888	0.5000	0.6481	15308.0
2	14.7945	0.8569	0.8547	0.7968	14965.4
3	19.7927	0.8569	0.3933	0.7968	7907.8
4	17.6129	0.8569	0.4080	0.7968	2789.2
5	17.2429	0.8569	0.3607	0.7968	2256.7
6	14.3384	0.7838	0.1361	0.8387	1807.8
7	13.4165	0.7511	0.0773	0.8605	1462.8
8	12.0346	0.6713	-0.0925	0.8770	1233.6
9	11.5239	0.5939	-0.2353	0.8709	1083.4
10	11.2449	0.4859	-0.4389	0.8478	999.9
11	11.1649	0.4090	-0.5856	0.8297	980.3
12	11.2165	0.4056	-0.5955	0.8272	980.0
13	11.2135	0.4053	-0.5963	0.8272	980.0

Hasil pada Tabel 1 menampilkan banyaknya iterasi yang dilakukan hingga berhenti atau konvergen dengan menggunakan metode Newton Raphson. Baris iterasi ke-0 merupakan nilai awal yang dipilih. Proses iterasi dilakukan terus menerus sampai memenuhi kriteria kekonvergenan yaitu apabila $S(\Theta_{i-1}) \leq S(\Theta_i)$. Proses tersebut konvergen pada iterasi ke-13 dan nilai pada iterasi ke-13 digunakan sebagai nilai dugaan bagi parameter yaitu $\hat{\theta}_1$ =11.2135, $\hat{\theta}_2$= 0.4053, $\hat{\theta}_3$= -0.5963, dan $\hat{\theta}_4$= 0.8272 dengan nilai $S(\Theta_{13})$ sebesar 980. Sehingga dapat dibentuk model produksi CES sebagai berikut :

$$Y = 11.21(0.41x_1^{-0.5963} + 0.58x_2^{-0.5963})^{-\frac{0.8272}{0.5963}} \quad (20)$$

Untuk memperoleh informasi tentang keragaman dari model maka dilakukan analisis ragam pada model persamaan (20). Hasil dari analisis ragam diperoleh sebagai berikut:

Tabel 2. Analisis ragam dari model pada persamaan (20)

Source	DF	Sum of Square	Mean Square
Model	4	198958	49739.6
Error	21	980.0	46.6647
Uncorrected Total	25	199938	

Berdasarkan hasil analisis ragam pada Tabel 2, diperoleh informasi bahwa derajat bebas dari model adalah 4. Derajat bebas menyatakan banyaknya informasi yang bebas digunakan untuk mendapatkan jumlah kuadrat dengan kata lain terdapat 4 parameter yang digunakan untuk memperoleh jumlah kuadrat

Jumlah kuadrat model diperoleh dengan mensubtitusikan nilai dugaan yang didapat ke dalam persamaan jumlah kuadrat selisih antara pengamatan ke-i, yaitu $\hat{Y}_i$ dengan nilai tengahnya $\bar{Y}$. Jumlah kuadrat yang diperoleh sebesar 198958.

Jumlah kuadrat tengah model di peroleh dari perbandingan antara jumlah kuadrat model dengan derajat bebas model, dengan nilai kuadrat tengah model sebesar 49739.6. Pada galat model, diketahui derajat bebasnya 21 dengan jumlah kuadratnya sebesar 980. Artinya, kesalahan model yang didapat sebesar jumlah kuadrat galat yaitu 980.

Tabel 3. Selang kepercayaan untuk $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, $\hat{\theta}_3$, dan $\hat{\theta}_4$

Parameter	Dugaan	Std. Error	Approksimasi 95%CI	
θ_1	11.2135	1.4273	8.2453	14.1817
θ_2	0.4053	0.1374	0.1195	0.6911
θ_3	-0.5963	0.2882	-1.1956	0.0029
θ_4	0.8272	0.0550	0.7128	0.9416

Tabel 3 menampilkan selang kepercayaan untuk masing-masing parameter. Untuk parameter θ_1, selang kepercayaan 95% bagi dugaannya antara 8.2453 dan 14.1817 dengan galat sebesar 1.4273. Kita juga dapat percaya sebesar 95% bahwa nilai dugaan θ_2 berada diantara 0.1195 dan 0.6911 dengan nilai kesalahan sebesar 0.1374. Untuk parameter θ_3 galat yang diperoleh sebesar 0.2882 dengan 95% selang kepercayaan antara -1.956 sampai 0.00297. Kita percaya 95% bahwa dugaan bagi θ_4 berada pada 0.7128 sampai 0.9416.

4.1 SIMULASI

Selanjutnya untuk memverifikasi hasil analisis diatas dilakukan simulasi dengan membangkitkan data untuk variabel X1, X2, dan Y. Pembangkitan data dilakukan berdasarkan nilai rata-rata dan simpangan baku masing-masing variabel dari data pada buku (Rasidin & Bonar, 2006) mengikuti distribusi normal [2]. Data yang dibangkitkan berukuran 30 dan diulang sebanyak 10 kali, sehingga diperoleh 10 set data. Dengan menggunakan nilai awal yaitu θ_1= 15, θ_2=0.6, θ_3= -0.3 dan θ_4= 0.5 [2]. diperoleh nilai dugaan bagi parameter model produksi CES untuk masing-masing set data, ditampilkan pada Tabel 4.

Tabel 4. Hasil analisis dengan menggunakan data hasil random

SET DATA	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	Sum Of Square
1	9.9441	0.3762	-0.5689	0.9198	3.5271
2	10.4071	0.4171	-0.4996	0.9199	5.9521
3	10.2377	0.4165	-0.4979	0.9248	9.7973
4	10.3814	0.4166	-0.4963	0.9195	11.1745
5	10.3489	0.4261	-0.4897	0.9268	7.7197
6	10.273	0.4104	-0.5121	0.9222	6.0664
7	9.6506	0.3475	-0.622	0.9196	6.3172
8	10.1754	0.3989	-0.5252	0.9196	10.4699
9	9.809	0.3628	-0.5973	0.9201	3.7675
10	10.0673	0.4269	-0.4791	0.9347	8.6298

Dari hasil pendugaan diatas kita tentukan nilai rata-rata masing-masing parameter dari 10 set data dan kemudian dijadikan sebagai nilai pendugaan bagi parameter model produksi CES. Diperoleh nilai dugaan untuk $\hat{\theta}_1$= 10.1925, $\hat{\theta}_2$=

ISSN No. 2502-8782

0.3999, $\hat{\theta}_3$= -0.5288, dan $\hat{\theta}_4$= 0.9227. Sehingga dapat dibentuk model produksi CES berdasarkan data hasil random berdasarkan data pada tabel 1. sebagai berikut :

$$Y = 10.19(0.39x_1^{-0.5288} + 0.60x_2^{-0.5288})^{-\frac{0.9227}{0.5288}} \qquad (21)$$

Dengan parameter distribusi $\hat{\theta}_2 = 0.3999$. sehingga koefisien $(1-\theta_2) = 0.6001$. Kombinasi input model (X_1) dan tenaga kerja (X_2) untuk menghasilkan produksi rangka baja masing-masing 39.99% dan 60.01%. *Return to scale* model adalah 82.72%, yang mengindikasikan bahwa jika dengan menggandakan kedua input akan meningkatkan produksi rangka baja sebesar 82.72%.

Elastisitas substitusi $\frac{1}{1+\rho} = \frac{1}{(1-0.5288)} = 2.122$. Hal ini menunjukan bahwa input-input mudah disubstitusikan. Koefisien dugaan parameter efisiensi $\hat{\theta}_1 = 11.213$, yang mengindikasikan presentase perubahan teknologi (perubahan yang disebabkan bukan oleh modal dan input tenaga kerja). Artinya bahwa peningkatan produksi rangka baja disebabkan oleh perubahan teknologi sebesar 11.213%.

Selanjutnya akan diperiksa kestabilan parameter-parameter yang diperoleh melalui simulasi. Nilai-nilai parameter pada Persamaan (20) dianggap sebagai nilai parameter sebenarnya, sedangkan nilai-nilai parameter pada persamaan (21) sebagai nilai dugaan parameter Persamaan (20). untuk memeriksanya dilakukan perhitungan bias bagi masing-masing parameter dengan menggunakan rumus berikut :

$$Bias\ \hat{\theta}_i \ = \ E(\theta_i) - \hat{\theta}_i. \qquad (22)$$

Bias dari suatu parameter adalah suatu nilai yang menyatakan seberapa jauh suatu penduga (statistik) menyimpang dari parameternya. Nilai ini merupakan selisih antara nilai harapan bagi parameternya dengan penduganya. Semakin dekat dengan nol dapat disimpulkan semakin baik suatu penduga untuk menduga parameter. Dan apabilan nilai biasnya 0 dapat diartikan bahwa penduga yang diperoleh adalah penduga tak bias.

Berdasarkan perhitungan diperoleh bias-bias bagi masing-masing parameter $\hat{\theta}_1$=-1.021, $\hat{\theta}_2$= -0.0054, $\hat{\theta}_3$= 0.0675 dan $\hat{\theta}_4$= 0.0955. Untuk parameter $\hat{\theta}_1$ dan $\hat{\theta}_2$ didapat bias dengan nilai negatif. Artinya nilai dugaan yang didapat dari hasil simulasi memiliki nilai parameter yang lebih kecil dari nilai parameter sebenarnya atau disebut dengan *under estimation*.

5 Simpulan dan Saran

Berdasarkan uraian sebelumnya, kesimpulan yang dapat diambil adalah sebagai berikut:

1. Pendugaan model nonlinear yaitu model produksi CES dengan menggunakan metode nonlinear kuadrat terkecil tidak dapat diselesaikan secara eksak maka digunakan metode numerik yaitu metode Newton Raphson.
2. Dari penilitian yang dilakukan didapat nilai dugaan untuk model produksi CES dengan menggunakan data pada tabel 1 adalah $\hat{\theta}_1$= 11.2135, $\hat{\theta}_2$= 0.4053, $\hat{\theta}_3$= -0.5963, dan $\hat{\theta}_4$= 0.8272 dengan kuadrat galat sebesar 980. dan dari nilai dugaan tersebut dapat dibentuk model produsi CES seperti pada persamaan (20).
3. Dari penilitian yang dilakukan didapat nilai dugaan untuk model produksi CES dengan menggunakan data hasil random adalah $\hat{\theta}_1$= 10.1925, $\hat{\theta}_2$= 0.3999, $\hat{\theta}_3$= -0.5288, dan $\hat{\theta}_4$= 0.9227. dan dari nilai dugaan tersebut dapat dibentuk model produsi CES seperti pada persamaan (21)
4. Bias bagi masing-masing parameter sebagai berikut $\hat{\theta}_1$= -1.021, $\hat{\theta}_2$= -0.0054, $\hat{\theta}_3$= 0.0675 dan $\hat{\theta}_4$= 0.0955. Hasil ini menunjukan metode kuadrat terkecil nonlinear cukup baik untuk menduga model CES.

Kepustakaan

[1] Draper, N. Dan Smith, H. 1981. *Analisis Regresi Terapan edisi kedua*. Sumantri B, penerjemah. Jakarta: Gramedia, terjemahan dari: *Applied Regression analysis*.

[2] Sitepu, K. Rasidin dan Sinaga, M. Bonar. 2006. *Aplikasi Model Ekonometrika*. Program studi Ilmu Ekonomi Pertanian Sekolah Pascasarjana Institut Pertanian Bogor. Bogor.

[3] Hoog, R.V. dan Allen T. Craig. 1995. *Introduction to Mathematical Statistics. Fifth edition*. Princtice-Hall Internasional Inc, New Jersey.

[4] Usman, Mustofa dan Warsono. 2009. *Teori Model Linear dan Aplikasinya*. Sinar Baru Algensindo. Bandung.

[5] Novalina. 2006. *Pendugaan Parameter Model Nonlinier*. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Universitas Lampung, Bandar Lampung.

[6] Seber, G.A.F dan Wild, C.J. 2003. *Nonlinear Regression*. Departement of statistics. University Auckland, New Zealand.

ISSN No. 2502-8782