

# Analisa Kendali Radar Penjejak Pesawat Terbang dengan Metode Root Locus

**Rosalina<sup>1)</sup> & Pancatatra Hesti Gunawan<sup>2)</sup>**

<sup>1)</sup>Program Studi Teknik Elektro Fakultas Teknik

<sup>2)</sup>Program Studi Teknik Mesin Fakultas Teknik

Universitas Muhammadiyah Prof. DR. HAMKA

Jl. Tanah Merdeka no.6 Kampung Rambutan Ciracas Jakarta Timur DKI Jakarta 13830

Telp.(021) 87782739, Fax. (021) 87782739, Mobile +6281283069764

E-mail: rosalina.husnul@yahoo.com

## **Abstrak**

*Metode Root Locus merupakan salah satu metode yang dipakai dalam keilmuan control engineering yang menggambarkan pergeseran letak kutub-kutub suatu sistem loop tertutup dari perubahan besarnya penguatan loop terbuka dengan gain adjustment. Analisa ini dipakai sebagai salah satu dasar untuk mendesain suatu sistem kendali sesuai dengan karakteristik dan spesifikasi yang diinginkan. Juga dapat menentukan apakah suatu system stabil atau tidak. Selain itu dapat menentukan besarnya rentang penguatan loop terbuka, agar suatu system masih dapat dikatakan stabil.*

**Kata kunci :** Kendali radar, Sistem kendali, Metode Root Locus

## **1 PENDAHULUAN**

Perkembangan teknologi sistem kendali telah mengalami kemajuan yang pesat seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi. Teori sistem kendali banyak diterapkan di berbagai bidang antara lain sistem persenjataan, pesawat terbang, satelit, industri dan sebagainya. Salah satunya radar, radar biasanya diklasifikasikan sebagai radar pencari (*search radar*) atau radar penjejak (*tracking radar*). *Search* (atau *surveillance*) radar mencari volume yang ditunjuk di udara untuk mendeteksi target yang mungkin ada. *Tracking* radar secara otomatis menjaga *beam axis*-nya menunjuk pada target yang dipilih.

Metode dan teori sistem kendali ini sudah lama berkembang sejak pertengahan abad 19. Diantaranya metode Tempat Kedudukan Akar (*Root Locus*), Metode Root Locus merupakan suatu teknik grafis yang memberikan deskripsi secara kualitatif performansi suatu sistem kendali dan juga suatu alat (*tool*) kuantitatif yang ampuh

(*powerful*), dapat digunakan untuk memecahkan persoalan-persoalan kontrol untuk sistem-sistem ordo tinggi dan dapat juga digunakan untuk menaksir stabilitas.

## **2 LANDASAN TEORI**

### **2.1 Fungsi Alih**

Dalam teknik kendali, fungsi yang disebut fungsi alih seringkali digunakan untuk mencirikan hubungan masukan-keluaran dari sistem linier parameter konstan. Dapat juga diperluas untuk suatu sistem kendali nonlinier.

Fungsi alih sistem linier parameter konstan didefinisikan sebagai perbandingan dari transformasi Laplace keluaran (fungsi tanggapan) dan transformasi Laplace masukan (fungsi penggerak), dengan menganggap semua syarat awal nol.

Tinjau sistem linier parameter konstan yang didefinisikan persamaan diferensial sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 & a_0^{(n)} y + a_1^{(n-1)} \dot{y} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y \\
 & = b_0^{(m)} x + b_1^{(m-1)} \dot{x} + \dots + b_{m-1} \dot{x} + b_m x
 \end{aligned}$$

(n ≥ m) (1)

dengan  $y$  adalah keluaran sistem dan  $x$  adalah masukan. Fungsi alih dari sistem ini diperoleh dengan mencari transformasi Laplace dari kedua ruas Persamaan 1, dengan menganggap semua syarat awal nol akan didapat  
 Fungsi alih =

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

Dengan menggunakan konsep ini adalah menyatakan dinamika suatu sistem dengan beberapa persamaan aljabar dalam  $s$ . Pangkat tertinggi dari  $s$  pada penyebut fungsi alih sama dengan orde suku turunan tertinggi dari keluaran. Jika pangkat tertinggi dari  $s$  tersebut  $n$ , maka sistem tersebut disebut sistem orde ke- $n$ .

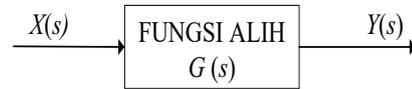
Langkah-langkah untuk mencari fungsi alih suatu sistem adalah sebagai berikut:

- a. Tulis persamaan diferensial dari sistem
- b. Cari transformasi Laplace dari persamaan diferensial, dengan menganggap semua syarat awal nol.
- c. Cari perbandingan dari keluaran dan masukan. Perbandingan ini adalah fungsi alih yang dicari.

## 2.2 Diagram Blok

Diagram blok suatu sistem adalah suatu penyajian bergambar dari fungsi yang dilakukan oleh tiap komponen dan aliran sinyal. Gambar (1) menunjukkan suatu elemen diagram blok. Anak panah yang menuju ke blok menyatakan masukan dan anak panah yang meninggalkan blok menyatakan keluaran. Anak panah yang menuju

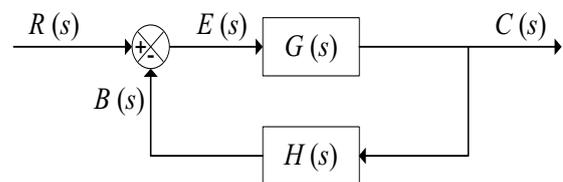
ke blok dan anak panah yang meninggalkan blok dianggap sebagai sinyal.



Gambar 1 Elemen diagram blok

Gambar 1. diagram blok suatu sistem loop tertutup secara lengkap seperti pada Gambar 2) Titik penjumlahan disimbolkan dengan  $\Sigma$  atau  $\otimes$ , yang mempunyai sejumlah masukan bertanda positif atau negatif. Tanda ini menyatakan masing-masing sinyal penjumlahan dan pengurangan. Keluaran  $C(s)$  diumpan balik ke titik penjumlahan untuk dibandingkan dengan masukan acuan  $R(s)$ . Keluaran yang diumpan balik ke titik penjumlahan ini harus diubah, agar bentuk sinyal keluaran tersebut sama dengan bentuk sinyal masukan. Misalkan dalam suatu sistem pengendalian temperatur, maka sinyal keluarannya adalah temperatur.

Sinyal keluaran yang mempunyai dimensi temperatur ini diubah menjadi suatu gaya atau posisi. Pengubahan ini dilakukan oleh elemen umpan balik yang mempunyai fungsi alih  $H(s)$ . Sinyal umpan balik yang diumpan balik ke titik penjumlahan ini untuk dibandingkan dengan sinyal masukan, dan dengan persamaan  $B(s) = H(s).C(s)$ .



Gambar 2 Diagram blok suatu sistem loop Tertutup

Perbandingan antara sinyal umpan balik  $B(s)$  dengan sinyal kesalahan  $E(s)$  disebut fungsi alih simpul terbuka, yang dinyatakan Fungsi alih lintasan terbuka =

$$\frac{B(s)}{E(s)} = G(s).H(s) \quad (2)$$

Perbandingan antara keluaran  $C(s)$  dengan sinyal kesalahan  $E(s)$  disebut fungsi alih umpan maju yang dinyatakan Fungsi alih umpan maju =

$$\frac{C(s)}{E(s)} = G(s)$$

Untuk sistem yang ditunjukkan pada Gambar 2. keluaran  $C(s)$  dan masukan  $R(s)$  dinyatakan sebagai berikut

$$C(s) = G(s).E(s).$$

$$E(s) = R(s) - B(s)$$

$$= R(s) - H(s).C(s)$$

eliminasi  $E(s)$  dari persamaan-persamaan diatas memberikan  $C(s) = G(s)[R(s) - H(s).C(s)]$  sehingga

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (3)$$

atau

$$C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s) \quad (4)$$

Suatu blok lengkap yang meliputi beberapa lintasan umpan balik dapat disederhanakan dengan menyusun kembali langkah demi langkah dengan menggunakan aturan aljabar diagram blok. Penyederhanaan diagram blok dengan penyusunan kembali dan substitusi memungkinkan untuk memudahkan analisis matematik. Harus diperhatikan bahwa bila suatu blok disederhanakan maka fungsi alih dalam diagram blok yang baru menjadi lebih kompleks karena kutub-kutub baru dan nol baru terbentuk.

Dalam menyederhanakan suatu diagram blok, harus diingat

- Hasil fungsi alih dalam arah umpan maju harus tetap sama.
- Hasil fungsi alih sekitar lintasan harus tetap sama.

### 2.3 Grafik Aliran Sinyal

Grafik aliran sinyal dapat dianggap sebagai versi sederhana dari diagram blok. Perbedaan pada penampilan fisis grafik aliran sinyal dan diagram blok adalah pada grafik aliran sinyal dibatasi oleh aturan matematis yang lebih ketat, sedangkan dengan menggunakan notasi diagram blok lebih bebas. Grafik aliran sinyal dapat diartikan sebagai gambaran grafis hubungan masukan dan keluaran antara variabel dari sekumpulan persamaan aljabar linier.

Sistem linier yang diuraikan dengan sekumpulan  $N$  persamaan aljabar adalah seperti berikut

$$y_j = \sum_{k=1}^N a_{jk} y_k \quad , \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (5)$$

Dari Persamaan 5. dimana  $N$  buah persamaan ini dapat ditulis dalam bentuk hubungan sebab dan akibat seperti berikut

$$\text{pengaruh ke } j = \sum_{k=1}^N (\text{penguatan dari } k \text{ ke } j) \times (\text{penyebab ke } k) \quad (6)$$

Pada kasus seketika dari Persamaan.5 direpresentasikan ke persamaan transformasi Laplace, maka persamaan ini menjadi

$$Y_j(s) = \sum_{k=1}^N G_k(s) Y_k(s) \quad , \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

### 2.4 Tempat Kedudukan Akar

#### 2.4.1 Syarat Sudut Dan Syarat Magnitude

Tinjau sistem yang ditunjukkan pada Gambar 3, Fungsi alih *loop* tertutup sistem adalah

$$\frac{\theta_R(s)}{\theta_A(s)} = \frac{KG(s)}{1+KG(s)H(s)} \tag{8}$$

Persamaan karakteristik sistem loop tertutup ini diperoleh dengan menyamakan ruas kanan Persamaan (2) dengan nol, jadi

$$1 + KG(s)H(s) = 0 \tag{9}$$

atau

$$K = -\frac{1}{G(s)H(s)} \tag{10}$$

Karena  $G(s)H(s)$  adalah besaran kompleks, maka Persamaan 10, dapat dipisahkan menjadi dua persamaan dengan menyamakan masing-masing sudut dan *magnitude* dari kedua ruas persamaan tersebut, jadi

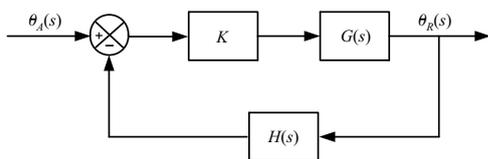
\*) Syarat sudut

$$\begin{aligned} \angle G(s)H(s) &= \tan^{-1}G(s)H(s) \\ &= \pm 180^\circ (2k + 1), \quad (k = 0,1,2,\dots) \end{aligned} \tag{11}$$

\*) Syarat *magnitude*

$$|K| = \frac{1}{|G(s)H(s)|} \tag{12}$$

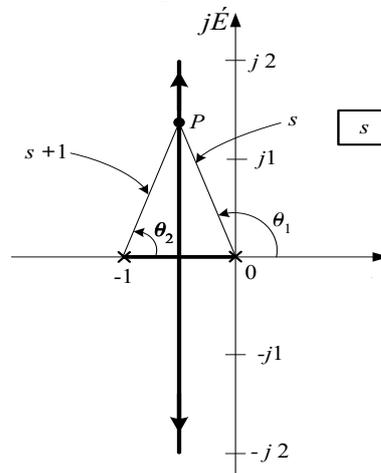
Harga-harga  $s$  yang memenuhi syarat sudut dan syarat *magnitude* adalah akar-akar persamaan karakteristik, atau kutub-kutub loop tertutup. Suatu diagram titik pada bidang kompleks yang hanya memenuhi syarat sudut. Akar-akar persamaan karakteristik (kutub-kutub loop tertutup) untuk suatu harga penguatan yang diberikan dapat diperoleh dari syarat *magnitude*.



Gambar 3 Diagram blok untuk tempat kedudukan akar

Tinjau titik  $P$  pada tempat kedudukan akar seperti pada Gambar 3, Besaran kompleks  $s$  dan

$s + 1$  masing-masing mempunyai sudut  $\theta_1$  dan  $\theta_2$ , dan *magnitude* masing-masing adalah  $|s|$  dan  $|s + 1|$ . Semua sudut dianggap positif jika diukur berlawanan arah jarum jam. Jelaslah bahwa jumlah sudut  $\theta_1$  dan  $\theta_2$  adalah  $180^\circ$ .



Gambar 4 Tempat kedudukan akar untuk titik P yang ditinjau

Jika titik  $P$  terletak pada sumbu nyata antara 0 dan  $-1$ , maka  $\theta_1 = 180^\circ$  dan  $\theta_2 = 0^\circ$ . Jadi dapat dilihat bahwa setiap titik pada tempat kedudukan akar tersebut memenuhi syarat sudut. Juga dapat dilihat bahwa jika titik  $P$  bukan merupakan titik pada tempat kedudukan akar, maka jumlah antara  $\theta_1$  dan  $\theta_2$  tidak sama dengan  $180^\circ (2k + 1)$  dimana  $k = 0,1,2, \dots$  Jadi titik yang tidak terletak pada tempat kedudukan akar, tidak memenuhi syarat sudut, sehingga bukan merupakan kutub loop tertutup untuk setiap harga  $K$ .

Jika dari tempat kedudukan akar adalah kutub-kutub loop tertutup, maka harga  $K$  yang berkaitan dengan kutub tersebut ditentukan dari syarat *magnitude*. Sebagai contoh jika kutub loop tertutup yang dipilih adalah  $s = -\frac{1}{2} \pm j2$ , maka harga  $K$  untuk kondisi ini adalah

$$\begin{aligned} \text{atau} \quad |G(s)H(s)| &= \left| \frac{K}{s(s+1)} \right|_{s=-\frac{1}{2} \pm j2} = 1 \\ K &= |s(s+1)|_{s=-\frac{1}{2} \pm j2} = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

**2.4.2 Aturan-aturan Dalam Penyusunan Tempat Kedudukan Akar**

Langkah-langkah yang digunakan dalam penyusunan tempat kedudukan akar adalah paling sering menggunakan syarat sudut yang menjadi syarat *magnitude* pada sebuah titik bidang *s* yang berada di tempat kedudukan akar. Syarat sudut tersebut diberikan oleh Pers 12.

**Langkah 1.**

Tulis persamaan karakteristik dalam bentuk nol-kutub.

Aturan ini dapat diterapkan karena model sistem yang digunakan merupakan fungsi rasional (polinomial) dengan koefisien nyata. Dengan demikian jika persamaan karakteristik memiliki akar  $1 + KG(s)H(s) = 1 + \frac{Kb_m(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}$  dan akar tersebut adalah akar dari persamaan itu juga. Persamaan karakteristik sistem pada Gambar 4, dapat dinyatakan dengan

(13)

Persamaan ini dapat dipisahkan berdasarkan fraksinya menjadi

$$\frac{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n) + Kb_m(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-z_m)} = 0 \tag{14}$$

Untuk  $K=0$ , akar-akar persamaan karakteristik adalah kutub-kutub dari fungsi *loop* terbuka  $G(s)H(s)$ . Untuk  $K$  mendekati tak hingga dan  $s$  terhingga, maka percabangan tempat kedudukan akar mendekati nol-nol fungsi *loop* terbuka. Jika fungsi memiliki nol-nol tak hingga yaitu  $n > m$ , maka tempat kedudukan akar akan mendekati nol-nolnya.

**Langkah 2.**

Tempat kedudukan akar dimulai dari kutub-kutub  $G(s)H(s)$  untuk  $K=0$  dan berakhir pada nol-

nol dari  $G(s)H(s)$  untuk  $K \rightarrow \infty$ , termasuk nol-nol pada titik tak hingga.

Aturan ini yang berhubungan dengan bentuk tempat kedudukan akar untuk harga-harga  $s$  yang besar.

**Langkah 3.**

Tentukan sudut dari asimtot serta pusat asimtot tempat kedudukan akar.

Jika fungsi *loop* terbuka memiliki  $\alpha$  nol pada titik tak hingga dengan  $\alpha \geq 1$ , maka tempat kedudukan akar mendekati  $\alpha$  asimtot untuk  $K$  mendekati tak hingga.

Sudut-sudut antara asimtot dan sumbu nyata

$$KG(s)H(s) = \frac{K(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots)}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots} = \frac{K(b_m s^m + \dots)}{s^{m+\alpha} + \dots} \tag{15}$$

Berdasarkan Persamaan 14, fungsi *loop* terbuka dapat ditulis sebagai berikut

(15)

$$\lim_{s \rightarrow \infty} KG(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Kb_m s^m}{s^n} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Kb_m}{s^\alpha} \tag{16}$$

Jika  $\alpha > 0$

maka persamaan tersebut akan mendekati harga tertingginya, dengan

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [1 + KG(s)H(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ \frac{Kb_m}{s^\alpha} \right] = 0 \tag{17}$$

Persamaan ini memiliki akar-akar

$$s^\alpha + Kb_m = 0 \tag{18}$$

Atau

$$s^\alpha = -Kb_m = Kb_m / k \ 180^\circ, \ k = \pm 1, \pm 3, \dots \tag{19}$$

*Magnitude* akar-akar ini mendekati tak hingga

karena anggapan bahwa  $s$  mendekati tak hingga. Sudut akar-akarnya adalah harga dasar dari sudut

$$\beta = \frac{k180^\circ}{\alpha}, \quad k = \pm 1, \pm 3, \dots \quad (20)$$

Sudut dari Persamaan (20) adalah sudut asimtot tempat kedudukan akar, karena umumnya akar-akar tempat kedudukan mendekati sudut ini di titik  $s$  (dan juga  $K$ ) mendekati tak hingga. Tabel 1) memberikan sudut-sudut ini untuk harga  $\alpha$  kecil. Untuk  $\alpha = 0$ , maka tidak terdapat asimtot. Tentu saja besar akar-akarnya adalah  $(Kb_m)^{1/\alpha}$ . Terlihat bahwa untuk harga  $\alpha$  yang diketahui, sudut mula-mula adalah  $180^\circ/\alpha$ , dengan kenaikan sebesar  $360^\circ/\alpha$ .

Tabel 1 Sudut-sudut asimtot

| $\alpha$ | Sudut                         |
|----------|-------------------------------|
| 0        | Tidak ada                     |
| 1        | $180^\circ$                   |
| 2        | $\pm 90^\circ$                |
| 3        | $\pm 60^\circ, \pm 180^\circ$ |

Cara 2

$$\beta = \begin{cases} \frac{(2k+1)180^\circ}{n-m}, & \text{untuk } K > 0 \\ \frac{(2k)180^\circ}{n-m}, & \text{untuk } K < 0 \end{cases} \quad (21)$$

Su dapat juga ditentukan dari persamaan seperti berikut

Untuk  $k=0,1,2, \dots, n-m-1$ , ini menghasilkan banyaknya asimtot yang sama dengan  $n-m$ .

Dari tempat kedudukan asimtot garis lurus  $\sigma_c = -\frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m}$  dari suatu titik pada bidang  $s$  di sumbu nyata yang disebut pusat asimtot  $\sigma_c$  yang diberikan oleh

dengan  $p_i$  adalah kutub-kutub,  $z_i$  adalah nol-nol,  $n$  adalah banyaknya kutub dan  $m$  adalah nol dari  $KG(s)H(s)$ .

**Langkah 4.**

Tentukan tempat kedudukan akar pada sumbu nyata.

Untuk menentukan tempat kedudukan akar pada sumbu nyata gunakan svari sudut seperti Pers  $KG(s)H(s) = \frac{K(s-z_1)}{(s-p_1)(s-p_2)}$  dan fungsi loop terbuka dengan dua kutub dan sebuah nol, dengan persamaan seperti berikut

Untuk mengetahui tempat kedudukan akar dari Gambar 3.3(a), pilih titik uji di sebelah kanan kutub  $p_1$ . Jika titik uji dipilih pada sumbu nyata di sebelah kanan kutub  $p_1$ , maka

$$\angle s-z_1 = \angle s-p_1 = \angle s-p_2 = 0^\circ$$

Jadi

$$-\angle s-z_1 - \angle s-p_1 - \angle s-p_2 = 0^\circ$$

Ini menunjukkan bahwa syarat sudut tidak terpenuhi. Oleh karena itu, tidak ada tempat kedudukan akar di sebelah kanan kutub  $p_1$ . Kemudian pilih uji titik  $s$  yang berada diantara kutub  $p_1$  dan nol  $z_1$  (lihat Gambar 3.3(b)), maka

$$\angle s-z_1 = 0^\circ, \quad \angle s-p_1 = 180^\circ, \quad \angle s-p_2 = 0^\circ$$

Jadi

$$-\angle s-z_1 - \angle s-p_1 - \angle s-p_2 = -180^\circ$$

Kondisi ini memenuhi syarat yang sesuai dengan syarat sudut yang diperlukan, dan semua titik yang berada di antara  $p_1$  dan  $z_1$  adalah berada pada tempat kedudukan akar. Untuk titik uji  $s$  yang berada diantara  $z_1$  dan  $p_2$ , adalah

$$\angle s-z_1 = 180^\circ, \quad \angle s-p_1 = 180^\circ, \quad \angle s-p_2 = 0^\circ$$

Jadi

$$-\angle s-z_1 - \angle s-p_1 - \angle s-p_2 = -360^\circ$$

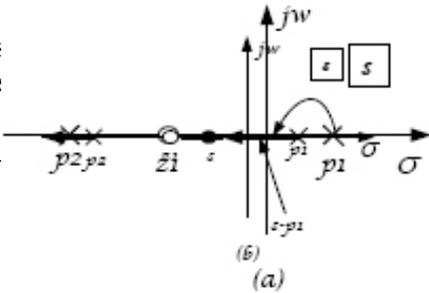
Kondisi ini syarat sudut tidak dipenuhi, sehingga semua titik yang berada diantara  $z_1$  dan  $p_2$  tidak berada pada tempat kedudukan akar. Untuk titik uji  $s$  yang berada di sebelah kiri  $p_2$ , adalah

$$\angle s-z_1 = 180^\circ, \quad \angle s-p_1 = 180^\circ, \quad \angle s-p_2 = 180^\circ$$

Jadi

$$-\angle s-z_1 - \angle s-p_1 - \angle s-p_2 = -180^\circ (2k + 1), \quad k = 1$$

Kondisi syarat : berada kedudukan



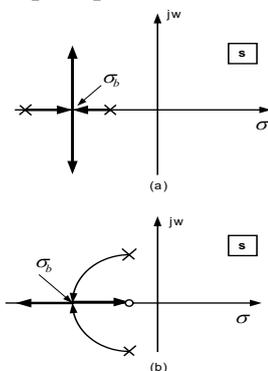
engan  $\zeta$  yang empat

Gambar 5 Tempat kedudukan akar pada sumbu nyata

**Langkah 5.**

Tentukan titik pencar tempat kedudukan akar di antara akar-akar polynomial (bila ada).

Langkah ini adalah menjelaskan tentang titik yang memiliki 2 atau lebih percabangan pada tempat kedudukan akar yang masuk dan keluar. Titik percabangan ini disebut titik pencar. Dua cabang yang meninggalkan sumbu nyata dapat digambarkan seperti pada Gambar 6 (b) dan dua cabang yang masuk ke dalam sumbu nyata dapat digambarkan seperti pada Gambar 6 (a).



Gambar 6 (a) Titik pencar yang meninggalkan sumbu nyata

$$1 + KG(s)H(s) = 1 + K \frac{N(s)}{D(s)} = 0 \tag{24}$$

2 polinomial  $N(s)$ , dan  $D(s)$  maka persamaan karakteristik sistem dapat ditulis

Kemudian :

$$D(s) + KN(s) = Q(s) = 0 \tag{25}$$

dengan  $Q(s)$  adalah polinomial karakteristik, jadi Persamaan (23) dan (24) dapat ditulis

$$K = -\frac{1}{G(s)H(s)} = -\frac{D(s)}{N(s)} \tag{26}$$

Persamaan karakteristik memiliki akar orde banyak pada titik pencar  $\sigma_b$  yang dapat dinyatakan dengan

$$\begin{aligned} \frac{dQ(s)}{ds} &= Q'(s) = \gamma(s - \sigma_b)^{\gamma-1} Q_1(s) + (s - \sigma_b)^\gamma Q_1'(s) \\ &= (s - \sigma_b)^\gamma [ \gamma Q_1(s) + (s - \sigma_b) Q_1'(s) ] \end{aligned} \tag{28}$$

terlepas dari persamaan 27, akan

$Q'(s)$  memiliki akar orde  $(\gamma - 1)$  di  $s = \sigma_b$ , yaitu  $Q'(\sigma_b) = 0$ , maka Persamaan (28) menjadi

$$Q'(s) = D'(s) + KN(s) \tag{29}$$

Substitusi Persamaan 26, ke Persamaan 29, akan menghasilkan

$$Q'(s) = D'(s) - \frac{D(s)}{N(s)} N'(s) \tag{30}$$

bila  $s$  dinyatakan  $s = \sigma_b$ , dan Persamaan 30, diset sama dengan nol, maka menjadi

$$Q'(\sigma_b) = 0 = D'(s)N(s) - D(s)N'(s) \Big|_{s=\sigma_b} \tag{31}$$

Dari Pers 31, akan memberikan polinomial dengan akar-akar yang merupakan titik pencar dari tempat kedudukan akar.

**Langkah 6.**

Tentukan sudut datang dan sudut pergi (bila ada)

Aturan ini adalah aturan yang dapat dikembangkan dari sudut yang terbentuk karena percabangan tempat kedudukan akar yang mendekati nol (sudut datang) dan yang meninggalkan kutub (sudut pergi). Untuk menentukan sudut datang ( $\theta_a$ ) dan sudut pergi ( $\theta_d$ ) ini adalah seperti berikut

$$\theta_a = \sum_i \theta_p - \sum_{i \neq j} \theta_z + k(180^\circ) \quad (32)$$

$$\theta_d = \sum_i \theta_z - \sum_{i \neq j} \theta_p + k(180^\circ) \quad (33)$$

dengan  $\theta_a$  adalah melambangkan sudut dari kutub  $p_i$  sampai ke  $p_j$ ,  $\theta_{z_i}$  adalah melambangkan sudut dari nol  $z$  sampai  $z$  dan

$$k = \frac{KG(s)H(s)}{s^2 + 2s + 3} \quad (34)$$

menentukan sudut pergi, perhatikan sistem dengan fungsi loop terbuka sebagai berikut

Terlihat bahwa  $KG(s)H(s)$  dari Persamaan 34, diatas mempunyai sepasang kutub konjugasi kompleks pada

$$s = -1 + j\sqrt{2}, \quad s = -1 - j\sqrt{2}$$

Untuk menentukan sudut pergi lihat Gambar 7, jika dipilih suatu titik uji  $s$  pada posisi yang sangat dekat dengan kutub loop terbuka di  $s = -p_1$ , maka jumlah kontribusi sudut dari kutub di  $s = -p_2$  dan nol di  $s = -z_1$  ke titik uji tersebut dapat dianggap tetap sama. Karena  $\theta'_{p_2} \cong \theta_{p_2} \cong 90^\circ$  dan  $\theta'_{z_1} \cong \theta_{z_1} \cong 55^\circ$ , maka sudut pergi pada Gambar 3.5 tersebut adalah

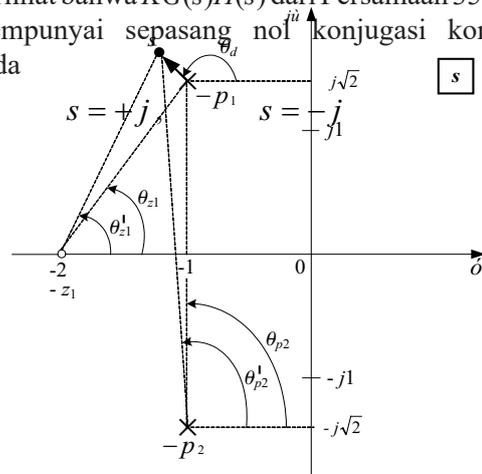
$$\theta_d = 55^\circ - 90^\circ + 180^\circ = 145^\circ$$

Karena tempat kedudukan akar simetris terhadap sumbu nyata, maka sudut pergi dari kutub

$$s = - \quad KG(s)H(s) = \frac{K(s+j)(s-j)}{s(s+1)} \quad (35)$$

sudut datang, perhatikan sistem dengan fungsi loop terbuka sebagai berikut

Terlihat bahwa  $KG(s)H(s)$  dari Persamaan 35, diatas mempunyai sepasang nol konjugasi kompleks pada

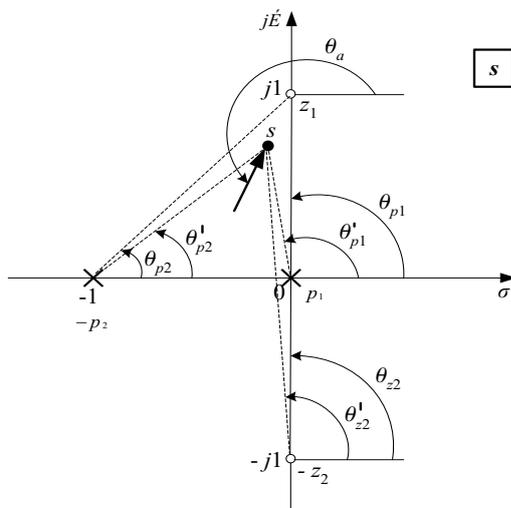


Gambar 7 Penentuan sudut pergi pada sistem fungsi loop terbuka dari Pers (34)

Untuk menentukan sudut datang lihat Gambar 8), jika dipilih suatu titik uji  $s$  pada posisi yang sangat dekat dengan nol loop terbuka di  $s = z_1$ , maka jumlah kontribusi sudut dari nol di  $s = z_1$  dan kutub di  $s = p_1$  dan  $s = -p_2$  ke titik uji tersebut dapat dianggap tetap sama. Karena  $\theta'_{p_1} \cong \theta_{p_1} \cong 90^\circ$  dan  $\theta'_{p_2} \cong \theta_{p_2} \cong 45^\circ$  dan  $\theta'_{z_2} \cong \theta_{z_2} \cong 90^\circ$ , maka sudut datang pada Gambar 8) tersebut adalah

$$\theta_a = 90^\circ + 45^\circ - 90^\circ + 180^\circ = 225^\circ$$

Karena tempat kedudukan akar simetris terhadap sumbu nyata, maka sudut datang ke nol di  $s = -z_2$  adalah  $-225^\circ$ .



Gambar 8 Penentuan sudut datang pada sistem fungsi loop terbuka dari Pers (35)

**Langkah 7.**

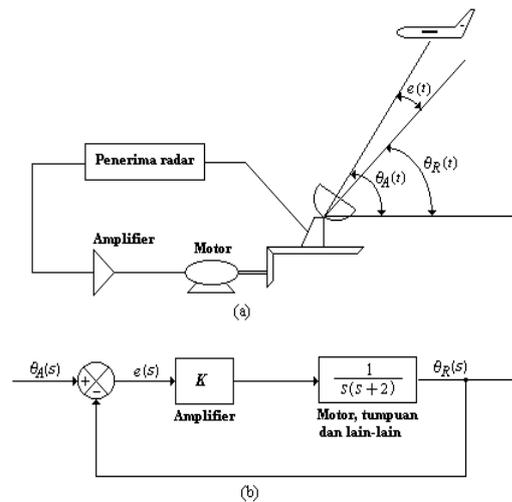
Tentukan titik-titik potong tempat kedudukan akar dengan sumbu khayal (bila ada).

Titik potong ini dapat diperoleh secara mudah dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz, dengan substitusi  $s = j\omega$  pada persamaan karakteristik, kemudian menyamakan baik bagian nyata maupun bagian khayal sama dengan nol, dan akhirnya mencari  $\omega$  dan  $K$ . Jadi harga  $\omega$  yang diperoleh akan memberikan informasi mengenai frekuensi pada saat tempat kedudukan akar memotong sumbu khayal, dan mengenai harga  $K$  yang merupakan penguatan kritis kestabilan.

**3 PERANCANGANSISTEM KENDALI**

**3.1 Sistem Radar Penjejak Pesawat Terbang dan Diagram Blok**

Gambar sistem radar penjejak pesawat terbang dan diagram blok seperti gambar 9.a dan 9.b dibawah ini



Gambar 9. a). Sistem radar penjejak pesawat terbang  
b). Diagram blok sistem radar penjejak-pesawat terbang

Perhatikan sistem radar penjejak pesawat terbang seperti pada Gambar 9.a, Gambar 9.b, yang menunjukkan diagram blok sistem tersebut. Fungsi alih loop tertutup adalah

$$T(s) = \frac{KG_p}{1 + KG_p(s)} = \frac{\frac{K}{s(s+2)}}{1 + \frac{K}{s(s+2)}} = \frac{K}{s^2 + 2s + K} \tag{36}$$

dari Pers.36 diatas persamaan karakteristiknya adalah

$$s^2 + 2s + K = 0 \tag{37}$$

**3.2 Menentukan Harga K Dengan Metode Tempat Kedudukan Akar**

Pers.37 merupakan persamaan orde 2, untuk mengetahui pengaruh pemilihan harga  $K$ , maka akar-akar persamaan karakteristik sistem harus digambarkan pada bidang  $s$ . Dari Pers.37 akar-akarnya adalah

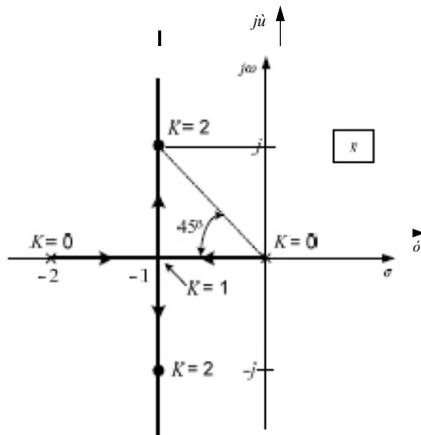
$$s = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4K}}{2} = -1 \pm \sqrt{1 - K} \tag{38}$$

Akar-akar dari Pers.38 adalah nyata dan negatif untuk  $0 < K \leq 1$  dan  $K > 0$  ini dapat dilihat

seperti pada Gambar 10). Karakteristik dinamik dari tanggapan undak satuan pada Gambar 10. ini, ada kaitannya dengan sistem redaman, yang dapat disimpulkan sebagai berikut:

Tabel 2 Dinamika Sistem

| Harga Penguatan (K) | Akar-akar persamaan karakteristik                     | Dinamika system                   |
|---------------------|---|-----------------------------------|
| $0 < K < 1$         | Dua akar nyata negatif berbeda                        | Sangat teredam ( $\xi > 1$ )      |
| $K=1$               | Dua akar nyata negatif yang sama                      | Teredam kritis ( $\xi = 1$ )      |
| $1 < K < \infty$    | Dua akar kompleks sekawan bagian nyata negatif        | Kurang teredam ( $\xi < 1$ )      |
| $-\infty < K < 0$   | Dua akar nyata berbeda, satu positif dan satu negatif | Sistem tidak stabil ( $\xi < 0$ ) |



Gambar 10 Tempat kedudukan akar dari Persamaan (38)

Dari Gambar 10 tempat kedudukan akar-akar diberi skala  $K$  sebagai parameter (pergerakan akar-akar dengan membesarnya harga  $K$  yang ditunjukkan dengan anak panah). Jika harga  $K$  diperbesar dari 0 sampai 1, maka kutub-kutub loop tertutup bergerak menuju titik  $(-1, 0)$ , dan semua kutub loop tertutup terletak pada sumbu nyata, sehingga sistem terjadi redaman lebih. Pada  $K = 1$ , kedua kutub loop tertutup nyata bersatu, sehingga

sistem terjadi redaman kritis. Jika  $K$  diperbesar dari 1 atau kutub loop tertutup konjugasi bergerak menuju  $s = -1 + j\infty$  dan yang lain bergerak menuju  $s = -1 - j\infty$ , maka kutub-kutub loop tertutup bergerak meninggalkan sumbu nyata atau menjadi kompleks, dan karena bagian nyata dari kutub loop tertutup adalah konstan untuk  $K > 1$ , sehingga sistem terjadi redaman kurang.

### 3.3 Menentukan Persamaan Kedudukan

Persamaan kedudukan dapat ditentukan dari fungsi alih sebagai berikut

$$\text{Atau } \frac{\theta_R(s)}{\theta_A(s)} = \frac{K}{s^2 + 2s + K} \quad (39)$$

$$s^2 \theta_R(s) + 2s \theta_R(s) + K \theta_R(s) = K \theta_A(s) \quad (40)$$

$$\ddot{\theta}_R + 2\dot{\theta}_R + K\theta_R = K\theta_A \quad (41)$$

Persamaan umum

$$\ddot{\theta}_R + a_1 \dot{\theta}_R + a_2 \theta_R = b_0 \ddot{\theta}_A + b_1 \dot{\theta}_A + b_2 \theta_A \quad (42)$$

dengan

$$a_1 = 2 ; a_2 = K$$

$$b_0 = 0 ; b_1 = 0 ; b_2 = K$$

sehingga

$$\beta_0 = b_0$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1 \beta_0$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0$$

Dengan demikian diperoleh variabel keadaan sebagai berikut

$$x_1 = x_2 + \beta_1 + \theta_A$$

$$x_2 = -a_2 x_1 - a_1 x_2 + \beta_2 \theta_A \quad (43)$$

Persamaan diatas bila ditulis dalam bentuk matrik sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \theta_A \quad (44)$$

Persamaan keluaran adalah

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (45)$$

#### 4 SIMULASI

Simulasi sistem kendali ditentukan dari persamaan keadaan dengan menggunakan penyelesaian persamaan differensial metode Runge-Kutta sehingga susunan programnya dalam bahasa *MATLAB* adalah sebagai berikut

```
disp('=====')
disp('= SISTEM KENDALI =')
disp('= PENJEJAK PESAWAT =')
disp('= TERBANG DENGAN =')
disp('= METODE ROOT LOCUS =')
disp('=====')
epsilon = 20.01;
disp('= Set point =')
disp('-----')
Sudut_Target = input(' Sudut Target = ');
disp('-----')
disp(' ')
% Harga parameter-parameter a dan b :
a1 = 2;
disp('Harga K :')
disp('-----')
a2 = input('K = ');
disp(' ')
b0 = 0;
b1 = 0;
b2 = a2;
% Harga-harga beta :
beta0 = b0;
beta1 = b1 - a1*beta0;
beta2 = b2 - a1*beta1 - a2*beta0;
disp('Harga delta t :')
disp('-----')
delta_t = input('delta_t = ');
disp(' ')
% Kondisi awal untuk :
x1 = 0;
x2 = 0;
Sudut_Radar = 0;
```

```
t = 0;
% Matriks b dan c untuk penyelesaian persamaan
% deferensial dengan metoda Runge-Kutta :
a = [1/6 1/3 1/3 1/6];
b = [0 0 0 0;0.5 0 0 0;0 0.5 0 0;0 0 1 0];
disp('=====')
disp('= HASIL =')
disp('=====')
disp('= t ! Posisi Pesawat =')
disp('= (dtk)! (derajat) =')
disp('=====')
while t < epsilon
    K(1) = delta_t*(x2+(beta1*Sudut_Target));
    L(1) = delta_t*((-a2*x1)-
(a1*x2)+(beta2*Sudut_Target));
for i = 2 : 1 : 4
    K(i) = delta_t*((x2+b(i,1:i-1)*K(1:i-
1)'+(beta1*Sudut_Target));
    L(i) = delta_t*((-a2*(x1+b(i,1:i-
1)*L(1:i-1)'))-(a1*(x2+b(i,1:i-1)*L(1:i-
1)'))+(beta2*Sudut_Target));
end
    x1 = x1 + a*K';
    x2 = x2 + a*L';
    Posisi_pesawat = [1 0]*[x1; x2];
    t = t + delta_t;
    v = [0 epsilon 0 2*Sudut_Target];
axis(v);
plot(t,Posisi_pesawat,'p')
grid on
hold on
fprintf('!%6.2f!%9.2f !\n',t,Posisi_pesawat)
end
disp('=====')
xlabel('Waktu, detik')
ylabel('Posisi Pesawat, derajat')
```

#### 5 SIMPULAN

1. Karakteristik tanggapan *transient* sistem *loop* tertutup dapat ditentukan dari lokasi kutub-kutub (*loop* tertutupnya).
2. Bila harga *K* berubah, maka letak kutub-kutub nya juga berubah.

## KEPUSTAKAAN

- [1] Cekdin, Cekmas., Sailah,Siti., *Dasar Teknik Kendali*, Palembang, Tunas Gemilang Press, 2009
- [2] Kuo, Benjamin C., *Automatic Control System*, Seventh Edition, Prentice-Hall International, Inc, 1995
- [3] Nise, Norman S.,*Control System Engineering*, Second Edition, Addison-wesley, 1995
- [4] Ogata, Katsuhiko., *Modern Control Engineering*, Third Edition, Prentice-Hall International, Inc, 1997